Der Schaudersche Fixpunktsatz

SEMINAR FIXPUNKTSÄTZE, SS 1998
PETER HINOW

1 Einführung

In einem der vorigen Vorträge wurde der Brouwersche Fixpunktsatz bereitgestellt.

Satz 1.1 Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und kompakt sowie $f : C \to C$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in C$ mit $f(x) = x$.

Dieser Satz gilt auch, wenn statt des $\mathbb{R}^n$ ein beliebiger normierter Raum zugrundegelegt wird. In solchen Räumen ist aber die Kompaktheit einer Menge nicht mehr äquivalent zu ihrer Abgeschlossenheit und Beschränktheit. Genauer gilt nach dem Satz von Riesz, daß in einem unendlichdimensionalen normierten Raum kompakte Mengen keinen inneren Punkt besitzen. Speziell sind die Einheitskugeln nicht kompakt. Es stellt sich die Frage, ob in einem unendlichdimensionalen normierten Raum die Voraussetzung der Kompaktheit der Menge C abgeschwächt werden kann zu der Forderung, daß C abgeschlossen und beschränkt ist. Der folgende Satz von Kakutani gibt eine negative Antwort.
Es bezeichne

$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \{(x_k) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x_k|^2 < +\infty\}$$

mit dem Skalarpordukt und der Norm

$$\langle x \mid y \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k y_k, \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

Proposition 1.1 (Kakutani, 1943) Es gibt eine stetige, fixpunktfreie Abbildung der Einheitskugel des $\ell^2(\mathbb{Z})$ in sich.
Beweis Wir betrachten $\ell^2(\mathbb{Z})$ mit der Standardbasis $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ mit $e_n = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$ und bezeichnen mit $B = \{x \in \ell^2(\mathbb{Z}) \mid \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Für $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ können wir schreiben

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e_k$$

Wir definieren den Rechtsshift-Operator $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ durch

$$Ux = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k e_{k+1}$$

Offenbar ist U linear und es gilt $\|Ux\| = \|x\|$, weshalb U auch stetig ist. Die Beziehung

$$x - Ux = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (x_k - x_{k-1})e_k = ce_0$$

für ein $c \in \mathbb{R}$ verlangt, daß $x_k = x_0$ für alle $k > 0$ und $x_k = x_{-1}$ für alle $k < 0$ gilt. Für ein Element $x \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ist dies aber nur möglich, falls $x_0 = x_{-1} = 0$ gilt. Somit gilt $x - Ux = ce_0$ genau dann, wenn $x = 0$.
Wir betrachten jetzt die Abbildung

$$Tx = (1 - \|x\|)e_0 + Ux$$

Da sowohl $\|\cdot\|$ als auch U stetig sind, ist auch T stetig. Für $\|x\| \leq 1$ gilt weiter

$$\|Tx\| \leq (1 - \|x\|)\|e_0\| + \|Ux\| = (1 - \|x\|) + \|x\| = 1$$

so daß $T(B) \subset B$ gilt. Schließlich ist T fixpunktfrei. Wäre nämlich

$$x = Tx = (1 - \|x\|)e_0 + Ux$$

dann wäre $x - Ux = (1 - \|x\|)e_0$, dies ist aber unmöglich für $x = 0$ und wie oben gezeigt auch für $x \neq 0$. □

2 Der Fixpunktsatz von Schauder

Sei im folgenden $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset E$.
Definition 2.1 Eine Abbildung $T : M \to M$ heißt <u>kompakt</u>, wenn T stetig ist und die Bildmenge $T(M)$ relativkompakt ist, d.h. wenn $\overline{T(M)}$ kompakt ist.
Wir können jetzt den Fixpunktsatz von Schauder formulieren.

Satz 2.1 (Schauder) [1] Sei $M \subset E$ abgeschlossen und konvex. Dann hat jede kompakte Abbildung $T : M \to M$ mindestens einen Fixpunkt.
Beweis Für den Beweis benötigen wir die sogenannten <u>Schauder-Projektionen</u>, die folgendes Lemma bereitstellt.
Lemma 2.1 Sei $C \subset E$ kompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Menge $Y \subset C$ und eine stetige Abbildung $P : C \to conv(Y)$, so daß

$$\|P(x) - x\| \leq \varepsilon \quad \forall x \in C$$

gilt.
Beweis Da C kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $Y = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset C$, so

[1] Juliusz P. Schauder, 1899-1944, von der Gestapo ermordet

daß C von der Vereinigung der offenen Kugeln $B_0(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, n$ überdeckt wird. Für $i = 1, \ldots, n$ und $x \in C$ sei

$$f_i(x) = \max(0, \varepsilon - \|x - y_i\|)$$

Dann gilt $x \in B_0(y_i, \varepsilon)$ genau dann, wenn $f_i(x) > 0$ gilt, und für jedes $x \in C$ ist einer der Werte $f_i(x)$ positiv. Die folgenden Funktionen sind also wohldefiniert

$$\lambda_i(x) = (\sum_{k=1}^{n} f_k(x))^{-1} f_i(x), \quad x \in C, \quad i = 1, \ldots, n$$

Die Abbildung

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) y_i, \quad x \in C$$

ist stetig, und es gilt $P(x) \in conv\{y_i | y_i \in B_0(x, \varepsilon)\}$, so daß die Forderungen des Lemmas erfüllt sind. □

Zum Beweis des Satzes 2.1 setzen wir jetzt $C = \overline{T(M)}$ und bilden gemäß Lemma 2.1 für $\varepsilon_m = 1/m, \quad m = 1, 2, \ldots$ eine Folge von Schauder-Projektionen (P_m) und den entsprechenden endlichen Teilmengen $Y_m \subset C \subset M$. Da M nach Voraussetzung konvex ist, gilt

$$conv(Y_m) \subset M$$

Da die endlichdimensionale kompakte konvexe Menge $conv(Y_m)$ durch die Abbildung $S_m = (P_m \circ T)|_{conv(Y_m)}$ stetig auf sich abgebildet wird, kann der Brouwersche Fixpunktsatz angewendet werden. Sei $x_m \in C$ ein Fixpunkt von S_m. Aus der Beziehung

$$S_m(x_m) = P_m(T(x_m)) = x_m$$

ergibt sich aufgrund der Stetigkeit von P_m und unter Beachtung von $T(x_m) \in C$ die Ungleichung

$$\|T(x_m) - x_m\| < \frac{1}{m} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Wegen $T(x_m) \in C$ gibt es eine Teilfolge x_{m_j} mit

$$\lim_{j \to \infty} T(x_{m_j}) = \bar{x} \in C$$

Wegen (2.1) gilt auch

$$\lim_{j \to \infty} x_{m_j} = \bar{x}$$

und wegen der Stetigkeit von T die Beziehung $T(\bar{x}) = \bar{x}$. □

3 Eine Anwendung des Fixpunktsatzes von Schauder

Wir erinnern uns daran, daß ein vollständiger normierter Raum als Banach-Raum bezeichnet wird. In beliebigen Banach-Räumen kann mit Hilfe eines Ordnungskegels eine Halbordnung $\leq$ eingeführt werden.

Definition 3.1 Sei X ein Banach-Raum. Eine nichtleere Teilmenge $K \subset X$ heißt Ordnungskegel, wenn gilt
(i) K ist abgeschlossen und $K \neq \{0\}$
(ii) $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x, y \in K \Longrightarrow ax + by \in K$
(iii) $x, -x \in K \Longrightarrow x = 0$
Weiter sei

$$x \leq y :\Longleftrightarrow y - x \in K$$

Durch $\leq$ ist eine Halbordnung auf X definiert. Für alle $x \in X$ ist nämlich $x - x = 0 \in K$, woraus die Reflexivität von $\leq$ folgt. Gilt $x - y \in K$und $y - x \in K$, so folgt wegen (iii) $x = y$, d.h. $\leq$ ist antisymmetrisch. Gilt $x - y \in K$und $y - z \in K$, so folgt wegen (ii) $(x - y) + (y - z) \in K$, d.h. $\leq$ ist auch transitiv.

Beispiel 3.1 Sei

$$X = \mathbb{R}^n, \quad K = {\mathbb{R}_{\geq 0}}^n$$

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \leq (\eta_1, \ldots, \eta_n) \iff \xi_i \leq \eta_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Beispiel 3.2 Jetzt sei

$$X = C[a, b], \quad K = C_+[a, b] := \{f \in C[a, b] \,|\, f(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, b]\}$$

$$f \leq g \iff f(t) \leq g(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

Wir betrachten jetzt das nichtlineare Eigenwertproblem

$$T(x) = \lambda x \quad \text{mit} \quad \lambda > 0, \quad x > 0, \quad \|x\| = a > 0 \tag{3.1}$$

wobei $x > 0 \iff x \geq 0$, $x \neq 0$. Für $x \in K$ und festes $x_0 > 0$ setzen wir

$$\alpha(x) = \sup\{t \geq 0 \,|\, x \geq t x_0\}$$

und für $r > 0$

$$K_r = \{x \in K \,|\, \|x\| \leq r\}$$

Satz 3.1 (Minorantenmethode von Krasnoselski) Sei X ein Banach-Raum, K ein Ordnungskegel in X, $r > 0$ und $T : K_r \subset X \to X$ kompakt. Weiter gebe es eine Abbildung $M : K \subset X \to X$ mit

$$T(x) \geq M(x) \quad \forall x \in K_r \tag{3.2}$$

(Minorante), so daß folgendes gilt: Es gibt ein $x_0 > 0, s \in (0,1], c > 0$ so daß

$$M(x) \geq \alpha(x)^s c x_0 \quad \forall x \in K_r \tag{3.3}$$

erfüllt ist. Dann ist das Problem (3.1) für jedes $a \in (0,r]$ lösbar.
Bemerkung Ist M linear auf X, dann folgt (3.3) bereits aus

$$Mx_0 \geq cx_0 \tag{3.3'}$$

Wegen $x \geq \alpha(x)x_0$ ist dann $Mx \geq \alpha(x)Mx_0 \geq c\alpha(x)x_0$ für alle $x \in K_r$.
Beweis Zum Beweis dieses Satzes wird zunächst für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Hilfsproblem formuliert, auf das der Fixpunktsatz von Schauder angewendet werden kann. Danach wird gezeigt, daß eine Teilfolge aus den Lösungen der Hilfsprobleme ausgewählt werden kann, die gegen eine Lösung des Problems (3.1) konvergiert.
1. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in K_r$ den Operator

$$T_n(x) = T(x) + \frac{x_0}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und betrachten das Hilfsproblem

$$\lambda_n x_n = T_n(x_n), \quad \lambda_n, x_n > 0, \quad \|x_n\| = a \tag{3.4}$$

Weiter definieren wir eine Funktion $z : X \to X$ durch

$$z(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ a\frac{x}{\|x\|} & \text{sonst} \end{cases}$$

und mit Hilfe von z den Operator $S : K_r \to X$

$$S(x) = \|x\| T_n(z(x)) + \frac{(a - \|x\|)x_0}{n}$$

Für alle $x \in X$ gilt $\|z(x)\| \leq a$, d.h. die Bildmenge $z(X)$ ist beschränkt. Außerdem gilt wegen der Stetigkeit der Norm $\|x\|T_n(z(x)) \to 0$ für $x \to 0$, so daß S in $x = 0$ stetig ist, in den Punkten $x \neq 0$ ist S stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Da T_n kompakt ist, ist auch S kompakt, und für alle $x \in K_a$ gilt

$$S(x) \geq \frac{\|x\|x_0}{n} + \frac{(a - \|x\|)x_0}{n} = \frac{ax_0}{n}$$

Daraus folgt, daß

$$\|S(x)\| \geq a_n > 0$$

für ein geeignetes a_n gilt. Andernfalls gäbe es eine Folge (x_m) mit

$$0 < \frac{ax_0}{n} \leq S(x_m) \to 0, \quad m \to \infty$$

was unmöglich ist. Aus der Beschränktheit von $S(K_a)$ folgt schließlich

$$0 < a_n \leq \|S(X)\| \leq b_n, \quad \forall x \in K_a \tag{3.5}$$

mit geeigneten Konstanten a_n, b_n. Der folgende Operator $V: K_a \to K_a$ ist damit wohldefiniert

$$V(x) = a\frac{S(x)}{\|S(x)\|}, \quad \forall x \in K_a$$

V ist ebenfalls kompakt und K_a ist abgeschlossen, konvex (K ist Ordnungskegel) und beschränkt. Die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Schauder sind damit erfüllt, d.h. es gibt ein $x_n \in K_a$ mit

$$x_n = V(x_n) \quad \text{und} \quad \|x_n\| = \|V(x_n)\| = a$$

also ist

$$z(x_n) = a\frac{x_n}{\|x_n\|} = x_n$$

und

$$x_n = \frac{a^2}{\|S(x_n)\|}T_n(x_n)$$

d.h. x_n ist Lösung des Hilfsproblems (3.4) mit $\lambda_n = \frac{\|S(x_n)\|}{a^2}$.
2. Wir beweisen jetzt folgende Abschätzung für λ_n

$$\exists \alpha, \beta > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}: \ 0 < \alpha \leq \lambda_n \leq \beta \tag{3.6}$$

Aus (3.4) folgt zunächst

$$\lambda_n a \leq \|T(x_n)\| + \|x_0\|, \quad \text{also} \quad \lambda_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wegen $x_n \geq \alpha(x_n)x_0$ existiert ein γ mit $\alpha(x_n) \leq \gamma \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Andernfalls würde für eine Teilfolge (x_{n_k}) gelten $\alpha(x_{n_k}) \to \infty$, was ein Widerspruch wäre zu

$$0 < x_0 \leq \frac{x_{n_k}}{\alpha(x_{n_k})} \to 0 \quad \text{für} \quad n_k \to \infty$$

Aus der Beziehung

$$\lambda_n x_n = T_n(x_n) = T(x_n) + \frac{x_0}{n} \geq \frac{x_0}{n}$$

ergibt sich $\alpha(x_n) > 0$ und weiter mit (3.2) und (3.3)

$$\lambda_n x_n \geq M(x_n) \geq \alpha(x_n)^s c x_0$$

d.h.

$$\alpha(x_n) \geq \frac{\alpha(x_n)^s c}{\lambda_n}$$

und somit

$$\lambda_n \geq \alpha(x_n)^{s-1}c \geq \gamma^{s-1}c$$

Diese Abschätzung ist unabhängig von n.
3. Schließlich lassen wir n in (3.4) gegen ∞ gehen. Wegen (3.6) und $\|x_n\| = a$ können wir Teilfolgen $\lambda_{n_k} \to \lambda > 0,\ T(x_{n_k}) \to y$ auswählen. Dann konvergiert auch

$$x_{n_k} = (T(x_{n_k}) + \frac{x_0}{n_k}){\lambda_{n_k}}^{-1} \to x$$

also gilt $\lambda x = T(x)$ nach (3.4) und $x \in K_a$ mit $\|x\| = a$. □

Beispiel 3.3 Sei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in {\mathbb{R}_{\geq 0}}^n, F = (f_1, \ldots, f_n) : {\mathbb{R}_{\geq 0}}^n \to {\mathbb{R}_{\geq 0}}^n$ sowie $\lambda > 0$. Wir betrachten das nichtlineare Gleichungssystem

$$\lambda x = F(x) \quad \text{bei} \quad \|x\| = a > 0 \tag{3.7}$$

Satz 3.2 (Verallgemeinerter Satz von Perron) Sei F stetig. Weiter gebe es Konstanten $m_{ij} \geq 0$ und $c, r > 0$, so daß für alle x mit $\|x\| \leq r$ die Ungleichungen

$$f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geq \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\xi_j, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \geq c, \quad \forall i = 1, \ldots, n \tag{3.9}$$

Dann ist das Problem (3.7) für alle $a \in (0, r]$ lösbar.

Beweis Wir setzen $X = \mathbb{R}^n, K = {\mathbb{R}_{\geq 0}}^n, x_0 = (1, \ldots, 1)$ und

$$Mx = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

wobei

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\xi_j$$

Dann kann (3.7) in der Form $\lambda x = T(x)$ geschrieben werden. Die Forderung (3.3′) aus der Bemerkung zu Satz 3.1 ergibt sich aus (3.8) und (3.9), d.h. $Mx_0 \geq cx_0$. Die Voraussetzungen des Satzes 3.1 sind also erfüllt, womit die Behauptung folgt. □

Beispiel 3.4 Wir betrachten jetzt die nichtlineare Integralgleichung

$$\lambda x(t) = \int_a^b A(s,t)f(s, x(s))ds \tag{3.10}$$

Dabei sei $\lambda > 0, x \in C_+[a, b], x \neq 0$.

Satz 3.3 (Verallgemeinerter Satz von Jentsch) Seien $A : [a, b]^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f : [a, b] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Weiter gelte für alle $(s, y) \in [a, b] \times [0, r]$

$$f(s, y) \geq \alpha y \tag{3.11}$$

mit einem $\alpha > 0$. Für die Funktion A gelte

$$\int_a^b A(s,t)ds \geq c > 0, \quad \forall t \in [a,b]$$

Dann existiert für jedes $\beta \in (0,r]$ eine Lösung von (3.10) mit $\|x\| = \beta$, dabei ist $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm auf $C[a,b]$.
Beweis Wieder wenden wir den Satz 3.1 an, diesmal mit $X = C[a,b]$, $K = C_+[a,b]$ und $x_0 \equiv 1$. Weiter definieren wir den linearen Operator

$$(Mx)(t) = \int_a^b A(s,t)x(s)ds$$

der die Bedingung (3.3′) der Bemerkung zu Satz 3.1 erfüllt. $\square$

Literatur

[1] Heuser, H.: Analysis 2, Teubner Verlag Stuttgart, 1988

[2] Riedrich, T.: Vorlesungen über nichtlineare Operatorgleichungen, Teubner Verlag Leipzig, 1976

[3] Zeidler, E.: Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis 1, Teubner Verlag Leipzig, 1975