论非线性多重网格法的逼近性质* 1)

谢 德 宣

（湖南大学应用数学系）

ON THE APPROXIMATION PROPERTY OF NON-LINEAR MULTIGRID METHOD

Xie De-xuan

(*Hunan University*)

Abstract

A sufficient condition on proving the approximation property of non-linear multigrid method is proposed for solving one kind of finite element non-linear equations. By it, we can get the convergence rate of non-linear multigrid method without knowing the normal order of convergence of the solution of the finite element equation to be solved.

多重网格法是一种求解椭圆边值问题离散所得的大型线性或非线性方程组的“最优”解法．在有限元离散情形，Hackbusch 提出了一种多重网格法的收敛分析方法，即把线性或非线性的多重网格法收敛率的估计问题归结为所谓“光滑性质”与“逼近性质”的研究． 在线性情形，若已知有限元解的误差估计，一般容易得到多重网格法的“逼近性质”[1]． 但对非线性多重网格法的“逼近性质”在什么条件下成立，尚未见到这方面的工作．

本文考虑一类非线性有限元方程的非线性多重网格法的收敛性，给出了其“逼近性质”成立的一个充分条件．作为这一方法的应用，证明了求解非线性平面电磁场有限元非线性方程[2]的非线性二重网格法的收敛性．

§1. 求解问题及符号约定

考虑非线性二阶椭圆边值问题，其变分形式记为：求 $u\in H_0^1(\Omega)$ 使

$$L(u,v)=(J(u),v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{1}$$

* 1991 年 3 月 19 日收到．

1）国家自然科学基金资助项目．

其中 $L(u,v)$ 为非线性泛函，$J(u)\in H^{-1}(\Omega)$ 且至少有一真解 $u^*\in H_0^1(\Omega)$。

对有界区域 Ω 作网格尺寸为 h_j 的三角剖分，构造一列线性有限元空间 V^j，使

$$V^1\subset V^2\subset\cdots\subset V^l\subset H_0^1(\Omega),$$

并记 S^j 是与 V^j 对应的向量空间，得问题(1)的一列有限元非线性方程组：

$$F_j(U^j)=0,\ U^j\in S^j,\ 1\leqslant j\leqslant l. \tag{2}$$

其对应的变分问题为：求 $u^j\in V^j$ 使

$$L(u^j,v)=(J(u^j),v),\ \forall v\in V^j. \tag{3}$$

同时假设：

1) 方程(2)至少有一真解 $U^{j,*}$，函数 $F_j:D\subset S^j\to S^j$ 在 $U^{j,*}$ 处连续可微，且在 $U^{j,*}$ 处的 Jacobi 导数 $DF_j(U^{j,*})$ 非奇异；

2) 存在算子 P_j: $S^j\to V^j$ 使 $u^j=P_jU^j$，且使(3)的真解 $u^{j,*}=P_jU^{j,*}$ 收敛于 u^*，当 h_j 趋于 0 时。

不失一般性，本文仅考虑非线性二重网格法。记 P: $S^{l-1}\to S^l$ 为延拓算子；r: $S^l\to S^{l-1}$ 为限制算子；$S^m(U^l;f_l)$ 为光滑算子，其在 U^* 处可微且 $U^*=S^m(U^*;f_l)$，其中 f_l 与 U^l 无关，$U^*=F_l^{-1}(f_l)$；特别，$U^{l,*}=F_l^{-1}(0)$。

§2. "逼近性质"成立的充分条件

有关非线性二重网格算法[1]，本文定义其"逼近性质"如下。

定义. 若存在与 h_l 无关的常数 C_A，使下式成立：

$$\|[DF_l(U^{l,*})]^{-1}-P[DF_{l-1}(\tilde{U}^{l-1})]_r^{-1}\|\leqslant C_Ah_l^2,$$

则求解问题(2)的二重网格法的"逼近性质"成立，其中 $\tilde{U}^{l-1}$ 为取定值。

下述定理给出"逼近性质"成立的一个充分条件.

定理. 设存在泛函 $N(u^{l,*};z,v)$，其对应的变分问题如下：求 $z\in H_0^1(\Omega)$，使

$$N(u^{l,*};z,v)=(f,v),\ \forall v\in H_0^1(\Omega) \tag{4}$$

存在唯一解. 它在与(3)相同的线性有限元空间 V^l 下的有限元方程：求 $z^l\in V^l$ 使

$$N(u^{l,*};z^l,v)=(f,u),\ \forall v\in V^l \tag{5}$$

的解存在唯一，并有误差估计：

$$\|z-z^l\|_0\leqslant C_Nh_l^2\|f\|_0,\ \forall f\in H^{-1}(\Omega). \tag{6}$$

方程(5)的刚度矩阵恰为方程(2)中 $F_l(U^l)$ 在 $U^{l,*}$ 处的 Jacobi 导数 $DF_l(U^{l,*})$，其中 $u^{l,*}=P_lU^{l,*}$。

另外，设

i) $b_p\|U^l\|\leqslant\|P_lU^l\|_0\leqslant C_P\|U^l\|$，$\forall U^l\in S^l$；

ii) $\|r\|\|P\|\leqslant C_{rP}$，$\|f\|_0\leqslant C_R\|f_l\|$；

iii) $A_{l-1}(u)$ 在 $u^{l,*}$ 处连续并且非奇异，其中矩阵函数 $A_{l-1}(u)=[N(u;\varphi_i^{l-1},\varphi_j^{l-1})]_{N_{l-1}\times N_{l-1}}$. $\{\varphi_i^{l-1}\}_{i=1}^{N_{l-1}}$ 为 V^{l-1} 的线性插值基且 $V^{l-1}\subset V^l$，则存在 $u^{l,*}$ 的邻域 $\rho(\delta)$，当 $\tilde{u}^{l-1}=P_{l-1}\tilde{U}^{l-1}\in\rho(\delta)$ 时，"逼近性质"成立，其中 $\tilde{U}^{l-1}$ 为取定值.

证明. 记 $R_l:H^{-1}\to S^l$，即 $f_l=R_lf$，$\forall f\in H^{-1}$. 显然方程(5)的解 z^l 可表为

$$z^l=P_l[DF_l(U^{l,*})]^{-1}R_lf.$$

因 $V^{l-1}\subset V^l$，又记 z^{l-1} 为(4)在 V^{l-1} 下的有限元解，有 $\tilde{z}^l\equiv z^{l-1}\in V^l$ 且相应的向量满足

$$\tilde{Z}^l = PZ^{l-1}.$$

于是得 $\tilde{z}^l$ 的表达式如下：

$$\tilde{z}^l = P_l P[A_{l-1}(u^{l,*})]^{-1} r f_l$$

且

$$\|z^l - \tilde{z}^l\|_0 \leqslant C_N C_R (1+\sigma^2) h_l^2 \|f_l\|,$$

其中 $h_{l-1}/h_l\leqslant\sigma$，$\sigma$ 为常数。

作矩阵问题：

$$DF_{l-1}(\tilde{U}^{l-1})W^{l-1} = f_{l-1}.$$

令 $W^l = P_l P W^{l-1}$ 且 $W^{l-1} = [DF_{l-1}(\tilde{U}^{l-1})]^{-1} r f_l$。由假设 iii) 知 $[A_{l-1}(u)]^{-1}$ 在 $u^{l,*}$ 处连续，即取定正数 ε 且 $\varepsilon\leqslant h_l^2$，必存在 $u^{l,*}$ 的邻域 $\rho(\delta)$，当 $\tilde{u}^{l-1}\in\rho(\delta)$ 时，有

$$\|[A_{l-1}(\tilde{u}^{l-1})]^{-1} - [A_{l-1}(u^{l,*})]^{-1}\| \leqslant h_l^2.$$

因此易得

$$\|W^l - \tilde{z}^l\|_0 \leqslant C_P C_{rP} h_l^2 \|f_l\|.$$

综合上述，对任取的 f_l，有

$$\|([DF_l(U^{l,*})]^{-1} - P[DF_{l-1}(\tilde{U}^{l-1})]^{-1} r) f_l\| \leqslant b_p^{-1}(C_N C_R(1+\sigma^2) + C_P C_{rP}) h_l^2 \|f_l\|.$$

由矩阵范数定义得到结论。

推论. 在上述定理条件下进一步设(3)的解有误差估计

$$\|u^{l,*} - u^*\|_0 \leqslant C_L h_l^\alpha,\ \alpha > 0,$$

则存在邻域 $\rho_{l-1}(\varepsilon_{l-1}) = \{U^{l-1}: \|U^{l-1} - U^{l-1,*}\| \leqslant \varepsilon_{l-1}\}$，当 $\tilde{U}^{l-1}\in\rho_{l-1}(\varepsilon_{l-1})$ 时，成立

$$\|[DF_l(U^{l,*})]^{-1} - P[DF_{l-1}(\tilde{U}^{l-1})]^{-1} r\| \leqslant C_A h_l^2.$$

§3. 例 子

作为上述定理的应用，考虑 [2] 中的非线性平面电磁方程，其变分形式为：求 $u\in H_0^1(\Omega)$，使

$$\int_\Omega \nu(B)\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dxdy = \int_\Omega g(u) v dxdy,\ \forall v\in H_0^1, \tag{7}$$

其中 $B = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}$，$\nu(B)$ 关于 B 在 $[0,+\infty)$ 上二次连续可微且有界。

在[3]中已证明了(7)的线性有限元解收敛并有误差估计

$$\|u^l - u\|_0 \leqslant ch. \tag{8}$$

显然这一估计式(8)是不丰满的，但可找出满足上述定理要求的双线性泛函：

$$N(u;z,\varphi) = \int_\Omega \left[\nu(B)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\nu'(B)}{B}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right] dxdy.$$

因此，易证求解问题(7)的非线性多重网格法的收敛性[3]。

参 考 文 献

[1] W. Hackbusch, Multigrid Methods and Applications, Springer-Verlag, 1985.

[2] 张磊，一类非线性椭圆边值问题的有限元法，计算数学，4(1978).

[3] 谢德宣，求解非线性电磁场有限元方程的非线性多重网格法，待发表.